

PRODUIT SCALAIRE

Objectifs

- Définir le produit scalaire à partir de la projection orthogonale et caractériser l'orthogonalité.
- Connaître les propriétés du produit scalaire : bilinéarité, symétrie, propriétés avec la norme.
- Connaître les autres expressions du produit scalaire (formule avec le cosinus, avec la norme, avec les coordonnées) et savoir choisir la plus adaptée.
- Connaître et utiliser, pour résoudre des problèmes géométriques, la formule d'Al-Kashi.
- Utilisation de l'expression $\vec{AM} \cdot \vec{BM}$.

I Un peu d'histoire...

Le concept de vecteur, et avec lui celui de produit scalaire, s'est développé, parallèlement en mathématiques avec la naissance de l'analyse complexe et en physique avec la mécanique, au XIX^{ème} siècle.

Scalaire vient du mot latin « scala » qui signifie échelle, mesure ; en mathématiques il désigne un nombre réel, en effet le produit scalaire est une opération entre deux vecteurs qui donne un réel.

Il va notamment permettre de résoudre par des calculs des problèmes de géométrie long à démontrer par les méthodes connues depuis l'antiquité. Il sert en physique à calculer le travail (c'est à dire l'énergie) d'une force qui s'applique sur un corps en mouvement.

Parmi les nombreux mathématiciens qui ont permis le développement d'un tel concept :

- **Galilée** mathématicien physicien, géomètre et astronome de génie italien (XVII^{ème} siècle). Il a notamment soutenu la théorie de l'héliocentrisme (énoncée par Copernic) contre celle d'Aristote (le géocentrisme) qui était celle soutenue par l'Église.
Il est considéré comme le père de la physique. En son hommage on parle de référentiel galiléen lorsque l'on est dans un repère où le principe d'inertie s'applique.
Grâce à sa lunette astronomique il découvre les 4 premiers satellites de Jupiter, dites Lunes galiléennes.
Pour représenter une force il utilise la notion de vecteur de manière implicite.
- Sir William Rowan **Hamilton**, mathématicien, physicien et astronome irlandais (XIX^{ème} siècle), est connu notamment pour sa découverte des « quaternions » qui permit le développement de la mécanique quantique. C'est à l'occasion de son invention des quaternions qu'il invente le mot vecteur.
- Hermann Günther **Grassman** (XIX^{ème} siècle), polymathe prussien, il était connu de ses contemporains en tant que linguiste. Mais c'est en tant que mathématicien et physicien qu'il fonda la théorie des espaces vectoriels.
- Josiah Willard **Gibbs** (XIX^{ème} siècle), physico-chimiste américain est l'un des créateurs de la mécanique statistique. À partir de la théorie des quaternions d'Hamilton, et parallèlement à Oliver Heaviside, il développe le calcul vectoriel afin de faciliter l'usage de cet outil en physique. On lui doit la notation actuelle du produit scalaire de deux vecteurs. Gibbs entreprend à cette occasion de faire mieux connaître l'œuvre de Grassmann.

II Rappels sur la notion de vecteur

Définition 1

- Un **vecteur** du plan définit une **translation** qui à tout point du plan associe son translaté ; il est donc caractérisé par une direction, un sens et une longueur (appelée **norme**).
- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour direction la droite (AB) , pour sens le sens de A vers B et pour norme $\|\overrightarrow{AB}\|$ la distance AB . A est appelé **l'origine du vecteur** $\overrightarrow{AB}$ et B son **extrémité**.
- Si $\vec{u}$ est un vecteur de représentant $\overrightarrow{AB}$, la norme $\|\vec{u}\|$ de $\vec{u}$ est égale à la distance AB .
- Le **vecteur nul** $\vec{0}$ définit la translation égale à l'identité (pas de mouvement) : $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$.
- Deux **vecteurs** sont **égaux** s'ils définissent la même translation.
Autrement dit s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.
- Le vecteur $-\vec{u}$ est le **vecteur opposé** à $\vec{u}$: ils ont même direction et même norme mais des sens contraires.
- La **somme des vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u} + \vec{v}$, définit la translation qui est la composée des translations associées à ces deux vecteurs.
- La **différence** $\vec{u} - \vec{v}$ est la somme $\vec{u} + (-\vec{v})$.
- Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul et k un réel non nul, $\vec{v} = k\vec{u}$, obtenu par la **multiplication d'un réel par un vecteur**, est le vecteur qui a même direction que $\vec{u}$, même sens si $k > 0$ et de sens contraire si $k < 0$ et de norme $\|\vec{v}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.
De plus $0.\vec{u} = \vec{0}$ et $\forall k \in \mathbb{R}, k.\vec{0} = \vec{0}$
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si $\vec{u}$ est le vecteur nul ou s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k.\vec{u}$. Dans le cas où les deux vecteurs sont non nuls, on dit alors que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **liés** ou **linéairement dépendants**.
Des vecteurs non colinéaires sont dits **linéairement indépendants** ou encore **libres**.

Propriété 1

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.
- I est le milieu de $[AB]$ équivaut à l'une des égalités vectorielles suivantes :

$$1. \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \qquad 2. \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \qquad 3. \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

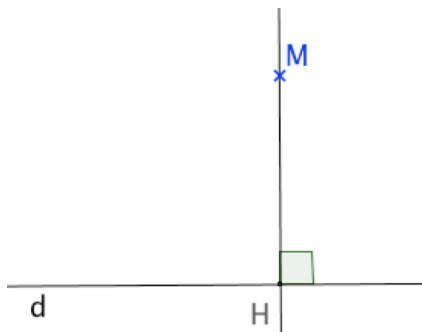
- Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- Somme de vecteurs de même origine : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.
- Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan.
 $(AB) \parallel (DC)$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires. En particulier les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Soit A et B deux points distincts du plan.
La droite (AB) est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.
- Soit $\vec{u}$ un vecteur, $\|\vec{u}\| \in \mathbb{R}^+ ; \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} ; \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{u}\|$.

III Produit scalaire

III.1 Définition du produit scalaire et orthogonalité

Définition 2

Soit une droite d et un point M du plan. Le projeté orthogonal du point M sur la droite d est le point d'intersection H de la droite d avec la perpendiculaire à d passant par M .


Définition 3

- Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, avec H le projeté orthogonal de C sur (AB) s'exprime ainsi :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens contraires.} \end{cases}$$

- Soit $\vec{u}$ un vecteur, $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$

Illustration :

Remarque

Dans le cas où $(AB) \perp (AC)$, H est confondu avec A donc $\overrightarrow{AH} = \vec{0}$ et donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Ainsi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ne signifie pas forcément que l'un des vecteurs est nul.

Définition 4

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont dits **orthogonaux** si $(AB) \perp (AC)$. Ce qui se note $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.

Propriété 2

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. Autrement dit :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Démonstration1. Supposons que $\vec{u} \perp \vec{v}$

Procédons par disjonction des cas :

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ (resp. $\vec{v} = \vec{0}$), par définition du produit scalaire, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$,

Notons $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ des représentants respectifs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Puisqu'ils sont non nuls, on peut considérer les droites (AB) et (AC) .

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow (AB) \perp (AC)$ donc le projeté orthogonal de C sur (AB) est A et donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{0} = 0$$

2. Supposons que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Procédons par disjonction des cas :

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ (resp. $\vec{v} = \vec{0}$), le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan donc $\vec{u} \perp \vec{v}$
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, comme précédemment on considère les droites (AB) et (AC) .

Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) . On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens contraires.} \end{cases}$$

De plus $\vec{u} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \neq \vec{0} \Leftrightarrow AB \neq 0$,

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ donne dans les deux cas de figure $AH = 0$.

Autrement dit les points A et H sont confondus et donc les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Par conséquent $\vec{u} \perp \vec{v}$.

EXERCICE

Démontrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Pour cela considérer un triangle ABC et H le point d'intersection de deux d'entre elles (ce point existe puisque les hauteurs sont, par définition, perpendiculaires aux côtés qui eux-mêmes sont sécants).

L'objectif est donc de montrer que dans un triangle ABC , $(CH) \perp (AB)$ sachant que $(AH) \perp (BC)$ et $(BH) \perp (AC)$.

Indication : on utilisera une propriété du produit scalaire : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.

III.2 Une autre expression du produit scalaire

Propriété 3

Soit deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le réel défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

Ce qui se note aussi,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$$

Remarques

1. Cette propriété étant une propriété caractéristique du produit scalaire, elle est parfois prise comme définition, avec l'inconvénient que l'on ne peut pas parler d'angle lorsque l'un des vecteurs est nul.
2. Dans la deuxième expression, au lieu de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ on a l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$. Prendre un angle géométrique ou un angle orienté ne change rien puisque $\cos(-x) = \cos x$.
3. La propriété 2 peut se démontrer avec cette propriété dans le cas de vecteurs non nuls :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ ou } (\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{\pi}{2} + 2k'\pi \text{ avec } k' \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}.$$
4. Cas particuliers : soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires.
 - $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si les vecteurs sont de même sens (cela correspond à un angle nul).
 - $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si les vecteurs sont de sens contraire (cela correspond à un angle plat).

EXERCICE

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants :

1. $AB = 3$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = 30^\circ$
2. $AB = 1$, $AC = 2$ et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$
3. $BA = 2$, $CA = 2$ et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$
4. $BA = 3$, $AC = \sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$

Démonstration

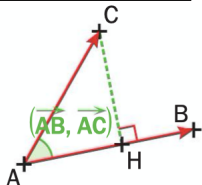
Le cas où l'un des vecteurs est nul est évident.

Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs non nuls, de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Puisqu'ils sont non nuls on peut considérer les droites (AB) et (AC) et H le projeté orthogonal de C sur (AB) .

Raisonnons par disjonction des cas :

- 1er cas : si $H \in [AB)$



D'une part, par définition, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH$ (1)

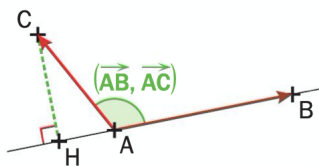
D'autre part, dans le triangle ABH , rectangle en H , $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{AH}{AC}$

donc $AH = AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ (2)

D'après (1) et (2) on a donc : $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

De plus $\|\vec{u}\| = AB$ et $\|\vec{v}\| = AC$ donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$

- 2ème cas : si $H \notin [AB)$



D'une part, par définition, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH$ (1)

D'autre part, dans le triangle ABH , rectangle en H , $\cos(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AH}) = \frac{AH}{AC}$

donc $AH = AC \times \cos(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AH})$ (2)

Or, $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AH}) = \pi + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$,

donc $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AH}) = \pi - (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

De plus $\cos(\pi - (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + 2k\pi) = \cos(\pi - (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})) = -\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

D'où $\cos(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AH}) = -\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

Soit, d'après (2), $AH = -AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

D'après (1), on obtient donc : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \times (-AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})) = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

Enfin, comme précédemment, on en déduit $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$

III.3 Produit scalaire et norme

Définition 5

Soit $\vec{u}$ un vecteur.

$\vec{u} \cdot \vec{u}$ est noté $\vec{u}^2$ et s'appelle le **carré scalaire** de $\vec{u}$

Propriété 4

Pour tout vecteur $\vec{u}$,

$$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 \text{ et } \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$$

Démonstration

Démontrons la première égalité par disjonction des cas :

- Si $\vec{u} = \vec{0}$:
D'une part, $\vec{0}^2 = \vec{0} \cdot \vec{0} = 0$, par définitions.
D'autre part, $\|\vec{0}\|^2 = 0^2 = 0$
Donc $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ lorsque le vecteur $\vec{u}$ est nul.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$:
 $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{u}) = \|\vec{u}\|^2 \times \cos(0) = \|\vec{u}\|^2 \times 1 = \|\vec{u}\|^2$

La deuxième égalité découle de la première en prenant la racine carrée (les deux membres étant des nombres strictement positifs).

Définition 6

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le réel défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$$

Remarque

Une telle définition, moins proche de la physique, permet de démontrer de manière simple les propriétés nécessaires aux calculs.

De plus elle a l'avantage d'être valable pour tous vecteurs, même si l'un des vecteurs est nul.

On peut montrer cette expression à partir d'une des expressions précédentes.

EXERCICE

Démontrer le théorème de Pythagore et sa réciproque en utilisant cette définition du produit scalaire.

Démonstration

Soit ABC un triangle et les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ non nuls.

- Démontrons le théorème de Pythagore.

Si ABC est un triangle rectangle en A alors $(AB) \perp (AC)$ et donc $\vec{u} \perp \vec{v}$, par définition.

Or $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2$$

$$\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

D'où le **théorème de Pythagore** : si ABC est un triangle rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$

- Démontrons la réciproque du théorème de Pythagore .

Si le triangle ABC vérifie $AC^2 = AB^2 + BC^2$, d'après les calculs précédents on a : $\vec{u} \perp \vec{v}$, soit $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{AC}$.

Avec $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = 0$ ou $\overrightarrow{AC} = 0$ ou $(AB) \perp (AC)$

Or ABC étant un triangle les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne peuvent être nuls et donc $(AB) \perp (AC)$, ce qui signifie que le triangle ABC est rectangle en A .

D'où la **réciproque du théorème de Pythagore** : si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors ABC est un triangle rectangle en A

III.4 Propriétés du produit scalaire**Propriété 5**

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et le réel λ , on a les propriétés suivantes :

- **Symétrie** :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

- **Bilinéarité** :

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \text{ et } \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v})$$

Remarques

1. En particulier pour $\lambda = -1$: $(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (-\vec{v})$

2. Autre propriété : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.

En effet : en posant $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$, on a : $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot (-\vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} - \|\vec{u}\|^2$

$$\text{Or } \vec{u} \cdot \vec{w} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{w}\|^2) = \frac{1}{2} (\|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|(\vec{v} - \vec{u})\|^2)$$

$$\text{Donc } \vec{u} \cdot \vec{v} - \|\vec{u}\|^2 = \frac{1}{2} (\|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|(\vec{v} - \vec{u})\|^2) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (2\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|(\vec{u} - \vec{v})\|^2)$$

$$\text{D'où } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

Démonstration

Considérons les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et le réel λ .

1. **Symétrie** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2} (\|\vec{v} + \vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2) = \vec{v} \cdot \vec{u}$

2. **Bilinéarité** :

(a) Procédons par disjonction des cas :

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ (resp. $\vec{v} = \vec{0}$),

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{0} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$\text{De plus, } \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{0} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 + \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w}.$$

$$\text{Donc } (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \text{ pour } \vec{u} = \vec{0}.$$

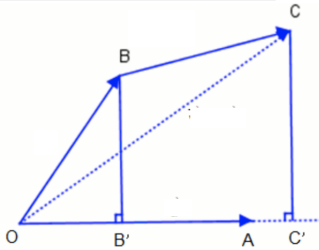
Remarque : on ferait un raisonnement analogue pour $\vec{v} = \vec{0}$.

- Si $\vec{w} = \vec{0}$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{0} = 0 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{0} + \vec{v} \cdot \vec{0} = 0 + 0 = 0.$$

D'où le résultat pour $\vec{w} = \vec{0}$.

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\vec{w} \neq \vec{0}$,



Notons $\vec{w} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{u} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, avec B' et C' les projetés orthogonaux de B et C respectifs sur (OA) .

Montrons la propriété dans le cas de figure ci-dessus et admettons la pour les autres cas de figures.

On a :

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = OA \times OC' \quad (1)$$

Par ailleurs,

$$\vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} \quad (2)$$

Notons D le point tel que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'D}$ et donc tel que $BCDB'$ soit un parallélogramme.

Donc $(BB') \parallel (CD)$. De plus, B' étant le projeté orthogonal de B sur (OA) , $(BB') \perp (OA)$ et donc $(CD) \perp (OA)$.

Or C' est le projeté orthogonal de C sur (OA) , donc $(CC') \perp (OA)$, ce qui donne $(CC') \parallel (CD)$ et donc $D \in (CC')$

Par conséquent, C' est le projeté orthogonal de D sur (OA) .

Considérons E tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{B'E}$ (et donc $BE' = OA$ et $E \in (OA)$).

On a donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'E} \cdot \overrightarrow{B'D} = B'E \times B'C' = OA \times B'C' \quad (3)$.

Finalement, d'après (2) et (3), avec dans cette configuration $B' \in [OC']$:

$$\vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} = OA \times OB' + OA \times B'C' = OA \times (OB' + B'C') = OA \times OC' \quad (4)$$

(1) et (4) permettent de conclure pour cette configuration : $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.

La symétrie permet d'en déduire l'autre égalité.

(b) Procédons par disjonction des cas :

- Si $\vec{u} = \vec{0}$,

$$(\lambda \vec{0}) \cdot \vec{v} = \vec{0} \cdot \vec{v} = 0 \text{ et } \lambda (\vec{0} \cdot \vec{v}) = \lambda \times 0 = 0$$

Donc $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$ pour $\vec{u} = \vec{0}$.

Si $\vec{v} = \vec{0}$, la symétrie permet de conclure.

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$,

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \|\lambda \vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\lambda \vec{u}; \vec{v}) = |\lambda| \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\lambda \vec{u}; \vec{v}).$$

i. Si $\lambda > 0$, $|\lambda| = \lambda$ et $\lambda \vec{u}$ et $\vec{u}$ étant colinéaires et de même sens, $(\lambda \vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et donc $\cos(\lambda \vec{u}; \vec{v}) = \cos(\vec{u}; \vec{v})$

$$\text{Finalement : } (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

- ii. Si $\lambda < 0$, $|\lambda| = -\lambda$ et $\lambda\vec{u}$ et $\vec{u}$ étant colinéaires et de sens contraires, $(\lambda\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et donc $\cos(\lambda\vec{u}; \vec{v}) = -\cos(\vec{u}; \vec{v})$

Finalement : $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = -\lambda \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times (-\cos(\vec{u}; \vec{v})) = \lambda \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Dans tous les cas, on a montré que : $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$ et la symétrie permet d'en déduire l'autre égalité.

Propriété 6

Identités remarquables

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

Démonstration

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs.

III.5 Expression analytique du produit scalaire

Définition 7

Une base orthonormée (ou orthonormale) du plan vectoriel est la donnée d'un couple de deux vecteurs $(\vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1$, $\|\vec{j}\| = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.

Autrement dit, les vecteurs de la base doivent être unitaires et orthogonaux.

Propriété 7

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{u}'(x', y')$ dans **une base orthonormée** $(\vec{i}, \vec{j})$ s'exprime ainsi :

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = xx' + yy'$$

Remarque

Cette expression est parfois prise comme définition du produit scalaire et permet de démontrer plus facilement la bilinéarité du produit scalaire.

Lemme 1

Si $\vec{u}$ est un vecteur de coordonnées (x, y) dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ alors :

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$$

Démonstration

Démonstration du lemme : Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées (x, y) dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, donc $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

$$\|\vec{u}\|^2 = \|x\vec{i} + y\vec{j}\|^2 = \|x\vec{i}\|^2 + \|y\vec{j}\|^2 + 2(x\vec{i} \cdot y\vec{j}) = (|x|\|\vec{i}\|)^2 + (|y|\|\vec{j}\|)^2 + 2x(y\vec{i} \cdot \vec{j}) = |x|^2\|\vec{i}\|^2 + |y|^2\|\vec{j}\|^2 + 2xy(\vec{i} \cdot \vec{j}).$$

Or $(\vec{i}, \vec{j})$ étant une base orthonormée, $\|\vec{i}\| = 1$, $\|\vec{j}\| = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ et donc $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$.

Démonstration

Démonstration de la propriété 7.

Soit les vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{u}'(x', y')$ dans **une base orthonormée** $(\vec{i}, \vec{j})$ donc $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ et $\vec{u} + \vec{u}' = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j}$.

$$\text{Par définition, } \vec{u} \cdot \vec{u}' = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{u}'\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}'\|^2 \right)$$

Donc, d'après le lemme 1,

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = \frac{1}{2} \left((x + x')^2 + (y + y')^2 - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2) \right)$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2)$$

$$= \frac{1}{2} (2xx' + 2yy')$$

$$= xx' + yy'$$

Corollaire 1

- Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Si le point M a pour coordonnées (x, y) dans un repère orthonormé $(O; \vec{OI}, \vec{OJ})$ alors $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Démonstration

IV Applications du produit scalaire

IV.1 Longueurs et angles dans un triangle

Propriété 8

Soit ABC un triangle.

- On peut exprimer la longueur d'un de ses côtés en fonction du produit scalaire :

$$AB^2 = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + AC^2 + CB^2$$

- On peut exprimer la mesure d'un de ses angles en fonction du produit scalaire :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$$

Démonstration

Propriété 9**Formules d'Al-Kashi**

Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

On a alors les relations suivantes, dites « formules d'Al-Kashi » :

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{BAC})$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\widehat{ABC})$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\widehat{ACB})$

Démonstration

Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

Démontrons la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{BAC}$.

$$a^2 = BC^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \overrightarrow{BC}^2 =$$

EXERCICE

le triangle PQR est tel que $PR = 5$, $PQ = 12$ et $QR = \sqrt{97}$.

On note R' le milieu de $[PQ]$. Prouver que le triangle PRR' est isocèle.

IV.2 Ensembles de points

Théorème de la médiane

Soit A et B deux points du plan et I le milieu du segment $[AB]$.

Pour tout point M du plan la relation suivante est vérifiée :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

Démonstration

Soit A et B deux points du plan et I le milieu du segment $[AB]$.

Pour tout point M du plan, d'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$$

Or I est le milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{IA}$ et $IA = \frac{AB}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Et donc : } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) \\ &= \|\overrightarrow{MI}\|^2 - \|\overrightarrow{IA}\|^2 \\ &= MI^2 - IA^2 \\ &= MI^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \\ &= MI^2 - \frac{AB^2}{4} \end{aligned}$$

EXERCICE

On considère un triangle ABC tel que $AB = 3$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Calculer la longueur de la médiane issue de A .

Corollaire 2**Formule de la médiane**

Soit A et B deux points du plan et I le milieu du segment $[AB]$.

Pour tout point M du plan la relation suivante est vérifiée :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Démonstration

Soit A et B deux points du plan et I le milieu du segment $[AB]$.

D'une part, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$ (1)

D'autre part, d'après la relation de Chasles et les propriétés du produit scalaire,

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\|^2 = \|\overrightarrow{AM}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB}$$

$$\text{Soit } AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \text{ donne donc } MA^2 + MB^2 = AB^2 + 2 \left(MI^2 - \frac{AB^2}{4} \right) = AB^2 + 2MI^2 - \frac{AB^2}{2}$$

$$\text{Et donc } \boxed{MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}}$$

EXERCICE

ABC est un triangle avec $AB = 4$, $AC = 6$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.

On note I le milieu de $[BC]$. Déterminer AI et BC .

Propriété 10

Soit deux points distincts A et B du plan.

L'ensemble des points M du plan vérifiant la relation $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Remarques

- Dire que l'ensemble des points M du plan vérifiant la relation $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$ revient à dire que :
si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ alors M appartient au cercle de diamètre $[AB]$,
et réciproquement, si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ alors $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
- On va donner trois démonstrations de cette propriété (l'une avec l'orthogonalité, l'autre avec le cosinus et la troisième avec le théorème de la médiane).

Démonstration

Soit deux points distincts A et B du plan.

Notons I le milieu du segment $[AB]$ et C le cercle de diamètre $[AB]$.

1. Avec l'orthogonalité :

montrons cette propriété caractéristique du cercle de diamètre $[AB]$ par « double inclusion ».

Soit E l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

- Pour tout point $M \in E$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \vec{0} \text{ ou } \overrightarrow{MB} = \vec{0} \text{ ou } (MA) \perp (MB) \\ &\Leftrightarrow M = A \text{ ou } M = B \text{ ou } AMB \text{ est un triangle rectangle en } M. \end{aligned}$$

D'après la propriété « l'hypoténuse d'un triangle rectangle est un diamètre de son cercle circonscrit », la conclusion « AMB est un triangle rectangle en M » implique que M est sur le cercle de diamètre $[AB]$, noté C . De même lorsque M est confondu avec A ou B .

Ainsi $E \subset C$ (1)

- Réciproquement, soit M un point du cercle C de diamètre $[AB]$.
Si M est en A ou en B , $\overrightarrow{MA} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ et donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
Si M est distinct de A et B , ABM un triangle.

D'après la propriété « Si l'un des côtés d'un triangle est un diamètre de son cercle circonscrit alors ce triangle est rectangle et ce côté son hypoténuse », ABM un triangle rectangle d'hypoténuse $[AB]$, autrement dit rectangle en M . On a alors $(MA) \perp (MB)$.

Par conséquent $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$ et donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Dans tous les cas de figures, $M \in E$ ce qui donne $C \subset E$ (2)

Enfin (1) et (2) donne $E = C$, autrement dit l'ensemble des points M du plan vérifiant la relation $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

2. Avec le cosinus :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \vec{0} \text{ ou } \overrightarrow{MB} = \vec{0} \text{ ou } \|\overrightarrow{AM}\| \times \|\overrightarrow{BM}\| \times \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = 0 \\ &\Leftrightarrow M = A \text{ ou } M = B \text{ ou } \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = 0 \\ &\Leftrightarrow M = A \text{ ou } M = B \text{ ou } (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow M = A \text{ ou } M = B \text{ ou } AMB \text{ est un triangle rectangle en } M. \end{aligned}$$

3. Avec la médiane : Soit M un point du plan.

Le théorème de la médiane donne : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 0 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4}$

MI étant une distance, c'est un nombre positif et donc :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow MI = \sqrt{\frac{AB^2}{4}} \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{2}.$$

Or A et B sont des points distincts donc l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$, autrement dit $MI = \frac{AB}{2}$ est le cercle de centre I et de rayon $\frac{AB}{2}$.

De plus I est le milieu de $[AB]$, donc ce cercle est le cercle de diamètre $[AB]$.

Ainsi M vérifie l'égalité $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ si et seulement si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

Remarque

Plus généralement on peut étudier les ensembles de points M définis par $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

On trouvera, suivant les points A et B et la valeur k , l'ensemble vide (si $k + \frac{AB^2}{4} < 0$), un singleton (si $k + \frac{AB^2}{4} = 0$) ou un cercle de centre I . (si $k + \frac{AB^2}{4} > 0$).

EXERCICE

Posons $AB = 10$, déterminons l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = k$ avec k prenant les valeurs successives 5, 0, -25 et -60

Pour aller plus loin...

Démontrer les **formules d'additions** :

a et b étant deux nombres réels quelconques, on a les formules d'additions suivantes :

$$\begin{aligned}\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a\end{aligned}$$

Démonstration de $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Soit a et b deux réels et $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé.

Sur le cercle trigonométrique, considérons les points A et B tels que :

$$(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = a[2\pi] \quad \text{et} \quad (\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = b[2\pi]$$

D'après la relation de Chasles :

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OB}, \vec{i}) + (\vec{i}, \overrightarrow{OA})[2\pi] = -(\vec{i}, \overrightarrow{OB}) + (\vec{i}, \overrightarrow{OA})[2\pi] = -b + a[2\pi] = a - b[2\pi].$$